

Analiza wektorowa - ćwiczenia

Przykład 1. Oblicz gradient funkcji $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$.

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f i mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + y^2.$$

Zatem $\text{grad} f = [2xz, 2yz, x^2 + y^2]$.

Przykład 2. W jakich punktach wektor $\overrightarrow{\text{grad} f}$, gdzie $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$, ma długość 2?

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{1/2} = 3x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{1/2} = 3y\sqrt{x^2 + y^2},$$

a więc

$$|\overrightarrow{\text{grad} f}| = \sqrt{\left(3x\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(3y\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = \sqrt{9x^2(x^2 + y^2) + 9y^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{9(x^2 + y^2)^2} = 3(x^2 + y^2).$$

Zatem

$$|\overrightarrow{\text{grad} f}| = 2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) = \frac{2}{3},$$

co oznacza, że punkty o tej własności, że wektor $\overrightarrow{\text{grad} f}$ ma długość 2 leżą na okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt{2/3}$.

Przykład 3. Oblicz dywergencję funkcji wektorowej $F(x, y, z) = [y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2]$.

Mamy $P(x, y, z) = y^2 + z^2$, $Q(x, y, z) = x^2 + z^2$, $R(x, y, z) = x^2 + y^2$ i

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

skąd $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

Przykład 4. Oblicz laplasjan funkcji $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{2(-x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Podobnie otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2(x^2 + y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Stąd

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2(-x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{2(x^2 + y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Przykład 5. Oblicz rotacje podanego pola wektorowego $F(x, y, z) = [y, x, z]$.

Korzystamy ze wzoru

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right].$$

Mamy $P = y$, $Q = x$, $R = z$ oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 1, & \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial R}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

a zatem

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Stąd $\operatorname{rot} \vec{F} = [0, 0, 0]$.

Przykład 6. Sprawdzić, czy pole

$$\vec{F} = [e^x \cos x, -e^x \sin y]$$

jest bezwirowe. Jeśli tak, to wyznaczyć potencjał tego pola.

Korzystamy ze wzoru $\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. Aby pole było bezwirowe (potencjalne), musi być spełniony warunek $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

Zatem $\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y + e^x \sin y = 0$. Zatem pole jest bezwirowe. Potencjałem tego pola jest funkcja f taka, że

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y.$$

Po scałkowaniu pierwszego wyrażenia otrzymujemy

$$f(x, y) = e^x \cos y + c(y).$$

Obliczamy pochodną cząstkową po y z powyższej funkcji i porównujemy z drugim wyrażeniem. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + \frac{\partial c}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

stąd $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$, co oznacza $c(y) = c$, gdzie c jest stałą rzeczywistą. Zatem potencjał ma postać

$$f(x, y) = e^x \cos y + c(y).$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Oblicz gradienty podanych funkcji:

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

b) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Znaleźć punkt (x, y) , w którym $\overrightarrow{\text{grad}}f = [1, -16/9]$, gdzie $f(x, y) = \ln(x + 1/y)$.

3. Oblicz dywergencję pola wektorowego

a) $F(x, y, z) = [x^2yz, xy^2z, xyz^2]$,

b) $F(x, y, z) = [e^xy, -\cos y, \sin^2 z]$.

4. Oblicz rotacje podanych pól wektorowych

a) $F(x, y, z) = [x, y, z]$,

b) $F(x, y, z) = [z, x, y]$,

c) $F(x, y, z) = [y, z, x]$.

5. Oblicz wartość laplasjanu funkcji $f(x, y, z) = x^2e^{yz} + xy^3z^2$ w punkcie $P_0(2, -1, -1)$.

6. Sprawdzić, czy pole $\overrightarrow{F} = [ze^{xy} + xyz e^{xy}, x^2ze^{xy}, xe^{xy}]$ jest bezwirowe. Jeśli tak, to wyznaczyć potencjał tego pola.