Niech $\overrightarrow{F} = [P, Q, R]$ będzie polem wektorowym określonym w zbiorze $G \subset \mathbb{R}^3$ i niech K będzie krzywą zamkniętą skierowaną w tym zbiorze. Wtedy całkę $\oint_K Pdx + Qdy + Rdz$ nazywamy **cyrkulacją** pola wektorowego $\overrightarrow{F}$ po krzywej K. Cyrkulację pola $\overrightarrow{F}$ można zapisać w postaci

$$\oint_K \overrightarrow{F} \circ d\overrightarrow{r} \quad , \quad d\overrightarrow{r} = [dx, dy, dz] \ .$$

Niech S będzie gładkim płatem powierzchniowym zorientowanym. Wtedy całkę $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ nazywamy **strumieniem** pola wektorowego $\overrightarrow{F}$ przez powierzchnię S (ze strony dodatniej na stronę ujemną). Strumień pola $\overrightarrow{F}$ można zapisać w postaci

$$\iint_S \overrightarrow{F} \circ d\overrightarrow{S} \quad , \quad d\overrightarrow{S} = [dydz, dzdx, dxdy] \ .$$

Wykorzystując powyższe pojęcia i notację można zapisać twierdzenie Greena w postaci

Twierdzenie 1 *Jeżeli pole wektorowe $\overrightarrow{F} = [P, Q]$ jest różniczkowalne w sposób ciągły wewnątrz i na brzegu zbioru regularnego D, przy czym brzeg K tego zbioru jest krzywą skierowaną dodatnio względem wnętrza, to*

$$\oint_K \overrightarrow{F} \circ d\overrightarrow{r} = \iint_D \operatorname{rot} \overrightarrow{F} dxdy.$$

Uogólnieniem twierdzenia Greena jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2 (Stokesa) *Jeżeli S jest płatem kawałkami gładkim zorientowanym, którego brzeg K jest krzywą kawałkami gładką, skierowaną zgodnie z orintacją płata S, a pole wektorowe $\overrightarrow{F} = [P, Q, R]$ jest różniczkowalne w sposób ciągły na płacie S i na jego brzegu, to*

$$\oint_K \overrightarrow{F} \circ d\overrightarrow{r} = \iint_D \operatorname{rot} \overrightarrow{F} dxdy \ .$$

Powyższy wzór, zwany **wzorem Stokesa**, po rozwinięciu można zapisać w postaci

$$\oint_K Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \ .$$

Przykład Oblicz całkę $I = \oint_K (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$ po krzywej K postaci $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 0$.

Najpierw ustalić należy czym jest krzywa K. Powstaje ona jako część wspólna powierzchni walcowej $x^2 + y^2 = 4$ i płaszczyzny $x + z = 0$. Osią symetrii powierzchni walcowej jest oś Oz, wektor normalny płaszczyzny jest postaci $\overrightarrow{n} = [1, 0, 1]$. Oznacza to, że prosta i wektor nie są do siebie ani prostopadłe, ani równoległe. Stąd i z podstawowych faktów z geometrii wynika, że krzywą przecięcia tych dwóch powierzchni jest elipsa.

Mamy

$$P = z - y \quad , \quad Q = x - z \quad , \quad R = y - x$$

i

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 \ , \ \frac{\partial R}{\partial x} = -1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \ , \ \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \ .$$

Z twierdzenia Stokesa mamy

$$I = \oint_K (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \iint_S 2dydz + 2dzdx + 2dxdy \ .$$

Płat S jest zbiorem ograniczonym wspomnianą wyżej elipsą leżącą w płaszczyźnie $x + z = 0$. Zatem równanie funkcyjne płata S można zapisać w postaci $z = f(x, y)$, gdzie $f(x, y) = -x$. Stąd $f'_x = -1$, $f'_y = 0$ i

$$I = \iint_S 2dydz + 2dzdx + 2dxdy = \iint_D (2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1)\, dxdy = 4 \iint_D dxdy = 4|D| \ ,$$

gdzie D jest rzutem prostopadłym S na płaszczyznę xOy, czyli kołem $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Ponieważ pole zbioru D jest równe 4π, więc $I = 16\pi$.

Twierdzenie Stokesa łączy całkę krzywoliniową skierowaną po krzywej zamkniętej, czyli cyrkulację pola $\overrightarrow{F}$, z całką powierzchniową. Kolejne twierdzenie łączy całkę powierzchniową zorientowaną, czyli strumień pola $\overrightarrow{F}$, po płacie zamkniętym z całką potrójną.

Twierdzenie 3 (Gaussa) *Jeśli S jest zorientowanym na zewnątrz, kawałkami gładkim płatem zamkniętym, który jest brzegiem zbioru domkniętego $G \subset \mathbb{R}^3$, a pole wektorowe $\overrightarrow{F} = [P, Q, R]$ jest różniczkowalne w sposób ciągły w zbiorze G, to*

$$\oiint_S \overrightarrow{F} \circ d\overrightarrow{S} = \iiint_G \operatorname{div} \overrightarrow{F} dxdydz \ .$$

Powyższy wzór, zwany **wzorem Gaussa**, po rozwinięciu można zapisać w postaci

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_G \left(\tfrac{\partial P}{\partial x} + \tfrac{\partial Q}{\partial y} + \tfrac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \ .$$

Przykład Oblicz strumień pola $\overrightarrow{F} = [2x, 2y, 2z]$ po zewnętrznej stronie sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

$$I = \oiint_S 2xdydz + 2ydzdx + 2zdxdy = \iiint_G (2 + 2 + 2)\, dxdydz \ = 6 \iiint_G dxdydz = 6|G| \ .$$

Ze wzoru na objętość kuli mamy $I = 6|G| = 216\pi$.

Przykład Oblicz strumień pola $\overrightarrow{F} = [x^2, y^2, z^2]$ po zewnętrznej stronie bryły ograniczonej przez powierzchnię stożkową $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i płaszczyznę $z = 1$.

$$I = \oiint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iiint_G (2x + 2y + 2z)\, dxdydz \ ,$$

gdzie $G : (x, y) \in D \ , \ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$, zaś D jest rzutem prostopadłym S na płaszczyznę xOy, czyli kołem $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Zatem

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 2\,(x + y + z)\, dz \right] dxdy = \iint_D \left[\left(2(x + y)z + z^2 \right) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz \right] dxdy \\ &= \iint_D \left[2(x + y) \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) + 1 - (x^2 + y^2) \right] dxdy \ . \end{aligned}$$

Po przejściu do współrzędnych biegunowych ($\Delta : \ r \in [0, 1] \ , \ \varphi \in [0, 2\pi]$) otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta \left[2(r\cos\varphi + r\sin\varphi)(1 - r^2) + 1 - r^2 \right] rdrd\varphi \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[2r^2(1 - r^2)(\cos\varphi + \sin\varphi) + r(1 - r^2) \right] d\varphi \right] dr \\ &= \int_0^1 \left[2r^2(1 - r^2)(\sin\varphi - \cos\varphi) + r(1 - r^2)\varphi \right]_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^1 2\pi r(1 - r^2) dr = \pi \left[r^2 - \tfrac{1}{2}r^4 \right]_0^1 = \tfrac{\pi}{2} \ . \end{aligned}$$

Przykład Oblicz strumień pola $\overrightarrow{F} = [z, y, x]$ przez dolną stronę paraboloidy $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Rozważany płat nie jest płatem zamkniętym, więc nie można użyć w tym momencie twierdzenia Gaussa. Można jednak domknąć go kołem $x^2 + y^2 \leqslant 4$ leżącym na płaszczyźnie $z = 4$. Oznaczmy więc płat wycięty z paraboloidy przez S_1, a koło (jego górną stronę) przez S_2. Zgodnie z tymi oznaczeniami postawiony problem sprowadza się do obliczenia całki $I_1 = \oiint_{S_1} zdydz + ydzdx + xdxdy$. Ponieważ $S = S_1 \cup S_2$ jest płatem kawałkami gładkim, zamkniętym, który ogranicza bryłę G postaci $G:\ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 4\ ,\ x^2+y^2 \leqslant 4$, więc

$$
\begin{aligned}
I &= \oiint_S zdydz + ydzdx + xdxdy = \iiint_G 1dxdydz = \iint_D \left[\int_{x^2+y^2}^{4} 1\ dz\right] dxdy \\
&= \iint_D \left[4 - (x^2+y^2)\right] dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} (4-r^2) r d\varphi\right] dr \\
&= \int_0^2 2\pi(4r - r^3) dr = \pi \left[4r^2 - \tfrac{1}{2} r^4\right]_0^2 = 8\pi\ .
\end{aligned}
$$

Z drugiej strony obliczamy całkę powierzchniową zorientowaną po S_2 o równaniu $z = f(x, y)$, $f(x, y) = 4$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Mamy $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ i

$$
I_2 = \oiint_{S_2} zdydz + ydzdx + xdxdy = \iint_D (4 \cdot 0 + y \cdot 0 + x \cdot 1) dxdy\ ,
$$

gdzie D jest rzutem prostopadłym S_2 na płaszczyznę xOy, czyli kołem $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Zatem

$$
I_2 = \iint_D xdxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} r\cos\varphi \cdot r d\varphi\right] dr = \int_0^2 \left[r^2 \sin\varphi\right]_0^{2\pi} dr = 0\ .
$$

Ponadto,

$$
I = \oiint_S zdydz + ydzdx + xdxdy = \oiint_{S_1} zdydz + ydzdx + xdxdy + \oiint_{S_2} zdydz + ydzdx + xdxdy = I_1 + I_2\ ,
$$

więc $8\pi = I_1 + 0$, a zatem

$$
I_1 = 8\pi\ .
$$