

Zagadka matematyczna nr 1

Jaka liczba nastąpi na setnym miejscu następującego ciągu: 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4...?
Czy trzeba wypisywać wszystkie liczby ciągu, by poznać rozwiązanie?
Czy można to obliczyć w szybszy sposób?

Rozwiązanie:

Łatwo zauważyć, że liczba wystąpień każdej liczby jest równa tej liczbie.

Zatem pozycja $l(n)$ pierwszego wystąpienia liczby n jest sumą wszystkich liczb naturalnych od 1 do $(n - 1)$ powiększoną o 1.

Ze wzoru na sumę $n - 1$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego otrzymujemy:

$$S_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Zatem pozycja pierwszego wystąpienia liczby n wyraża się wzorem:

$$l(n) = \frac{n(n - 1)}{2} + 1.$$

Szukamy największej liczby naturalnej n , dla której $l(n) \leq 100$, tzn. $\frac{n(n - 1)}{2} + 1 \leq 100$.

Z rozwiązania tej nierówności kwadratowej wynika, że taką liczbą jest $n = 14$.

Pozycja pierwszego wystąpienia liczby 14 wynosi $l(14) = \frac{14 \cdot 13}{2} + 1 = 92$.

Liczba 14 wystąpi 14 razy, więc na miejscu setnym pojawi się liczba 14.