

2. Pochodne cząstkowe - ćwiczenia

Uwaga: Obliczając pochodne cząstkowe względem jednej zmiennej, pozostałe zmienne traktujemy jako stałe. Ponadto, stosujemy reguły różniczkowania znane z analizy funkcji jednej zmiennej.

Przykład 1

Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu funkcji: $f(x, y) = 2x^2 + 3y^4 - 4xy^3 - 2e^{xy}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4y^3 - 2ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 - 12xy^2 - 2ye^{xy}$$

Przykład 2

Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:

$$f(x, y, z) = 3x^3yz^2 - \frac{z^2}{x} + (y^2 - x^2)^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2yz^2 - z^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2(y^2 - x^2)(-2x) = 9x^2yz^2 + \frac{z^2}{x^2} - 4x(y^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3z^2 + 2(y^2 - x^2)(2y) = 3x^3z^2 + 4y(y^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 6x^3yz - 2z\frac{1}{x} = 6x^3yz - \frac{2z}{x}$$

Przykład 3

Obliczyć pochodne cząstkowe II rzędu funkcji:

$$f(x, y) = \ln(x - y) + 2xy.$$

Zaczynamy od pochodnych cząstkowych I rzędu :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - y} \cdot 1 + 2y = \frac{1}{x - y} + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x - y} \cdot (-1) + 2x = -\frac{1}{x - y} + 2x$$

Obliczamy pochodne cząstkowe II rzędu czyste:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x - y} + 2y \right) = -\frac{1}{(x - y)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{x - y} + 2x \right) = -\left(-\frac{1}{(x - y)^2} \cdot (-1) \right) = -\frac{1}{(x - y)^2}$$

Następnie obliczamy pochodne cząstkowe II rzędu mieszane i sprawdzamy ich równość :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{x - y} + 2x \right) = -\left(-\frac{1}{(x - y)^2} \cdot 1 \right) + 2 = \frac{1}{(x - y)^2} + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x - y} + 2y \right) = -\frac{1}{(x - y)^2} \cdot (-1) + 2 = \frac{1}{(x - y)^2} + 2$$

Przykład 4

Obliczyć pochodne cząstkowe II rzędu funkcji:

$$f(x, y, z) = xy^3z^2 - e^{2xy}.$$

Zaczynamy od pochodnych cząstkowych I rzędu :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3z^2 - e^{2xy} \cdot 2y = y^3z^2 - 2ye^{2xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2z^2 - e^{2xy} \cdot 2x = 3xy^2z^2 - 2xe^{2xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xy^3z$$

Obliczamy pochodne cząstkowe II rzędu czyste :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y^3 z^2 - 2ye^{2xy}) = 0 - 2y \cdot e^{2xy} \cdot 2y = 4y^2 e^{2xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3xy^2 z^2 - 2xe^{2xy}) = 6xyz^2 - 2x \cdot e^{2xy} \cdot 2x = 6xyz^2 - 4x^2 e^{2xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (2xy^3 z) = 2xy^3$$

Następnie obliczamy pochodne cząstkowe II rzędu mieszane i sprawdzamy ich równość parami :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3xy^2 z^2 - 2xe^{2xy}) = 3y^2 z^2 - (2e^{2xy} + 2xe^{2xy} \cdot 2y) = 3y^2 z^2 - 2e^{2xy} - 4xye^{2xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y^3 z^2 - 2ye^{2xy}) = 3y^2 z^2 - (2e^{2xy} + 2ye^{2xy} \cdot 2x) = 3y^2 z^2 - 2e^{2xy} - 4xye^{2xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^3 z) = 2y^3 z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (y^3 z^2 - 2ye^{2xy}) = 2y^3 z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^3 z) = 6xy^2 z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (3xy^2 z^2 - 2xe^{2xy}) = 6xy^2 z$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:

(a) $f(x, y) = 2x^3 y^4 - 3x + 2y - 1$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2\sqrt{xy}$

(c) $f(x, y) = x(x - y)^5$

(d) $f(x, y) = 2 - ye^{xy^2}$

(e) $f(x, y) = \frac{2y}{x} - \arcsin y$

(f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(g) $f(x, y) = xy \cos(xy)$

(h) $f(x, y) = (x + 2)^4 (y - 3)^2$

2. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe II rzędu funkcji:

(a) $f(x, y) = x^2 y^3 - 4xy + 2y - 1$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sin xy$

(c) $f(x, y) = \frac{3 - 3x}{y + 2}$

(d) $f(x, y) = (x - 5)^2 (y + 7)^3$

3. Niech $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Wykazać, że dla każdego $(x, y) \neq (0, 0)$ zachodzi równość:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2.$$

4. Niech $f(x, y, z) = 1 + \frac{x - y}{y - z}$. Wykazać, że dla każdego (x, y, z) , gdzie $y \neq z$ zachodzi równość:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1.$$