

## 2.2 Niezależność całki od drogi całkowania

### Przykład.

Rozważmy całkę  $\int_{K_i} (2x + 2y)dx + (2x + 3y^2)dy$ , gdzie  $K_i$  jest odpowiednio:

- (a)  $K_1$  jest odcinkiem  $[-1, 1]$  łączącym punkty  $A(-1, 0)$  i  $B(1, 0)$ ;
  - (b)  $K_2$  jest łukiem paraboli  $y = 1 - x^2$ ,  $x \in [-1, 1]$ ;
  - (c)  $K_3$  jest łukiem okręgu  $x^2 + y^2 = 1$  łączącym punkty  $A(-1, 0)$  i  $B(1, 0)$ ;
- (a) Parametryzacja krzywej  $K_1$  jest postaci  $x(t) = t$ ,  $y(t) = 0$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Wtedy

$$\int_{K_1} (2x + 2y)dx + (2x + 3y^2)dy = \int_{-1}^1 (2t \cdot 1 + 2t \cdot 0)dt = \int_{-1}^1 2t dt = [t^2]_{-1}^1 = 1 - 1 = 0.$$

- (b) Parametryzacja krzywej  $K_2$  jest postaci  $x(t) = t$ ,  $y(t) = 1 - t^2$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{K_2} (2x + 2y)dx + (2x + 3y^2)dy &= \int_{-1}^1 [2(t + 1 - t^2) \cdot 1 + (2t + 3(1 - t^2)^2)(-2t)] dt = \\ &= \int_{-1}^1 (-6t^5 + 12t^3 - 6t^2 - 4t + 2) dt = [-t^6 + 3t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 2t]_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

- (c) Parametryzacja okręgu  $x^2 + y^2 = 1$  jest postaci  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, \pi]$ , przy czym początkiem krzywej jest punkt  $B$ , a końcem punkt  $A$ . Zatem jest to parametryzacja krzywej  $-K_3$ . Wykorzystamy własność

$$\int_{K_3} (2x + 2y)dx + (2x + 3y^2)dy = - \int_{-K_3} (2x + 2y)dx + (2x + 3y^2)dy$$

i stąd

$$\begin{aligned} \int_{K_3} (2x + 2y)dx + (2x + 3y^2)dy &= - \int_0^\pi [2(\cos t + \sin t)(-\sin t) + (2\cos t + 3\sin^2 t)(\cos t)] dt = \\ &= - \int_0^\pi (-2\sin t \cos t - 2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 3\sin^2 t \cos t) dt = - \int_0^\pi [-\sin 2t - 2\cos 2t + 3\sin^2 t \cos t] dt = \\ &= - \left[ \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^\pi + [\sin 2t]_0^\pi - \int_0^\pi 3\sin^2 t \cos t dt = 0 \end{aligned}$$

Czy to przypadek, że całka po każdej drodze całkowania daje ten sam wynik?  $\rightarrow$  **nie!**

**Twierdzenie 1** Jeżeli funkcje  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  są ciągłe w zbiorze  $D$  i mają ciągłe pochodne czątkowe rzędu pierwszego, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby w tym zbiorze całka krzywoliniowa

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

nie zależała od drogi całkowania jest, by wyrażenie

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

było różniczką zupełną pewnej funkcji  $F(x, y)$ , tzn. by spełniony był warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Z twierdzenia tego wynika następujący wniosek.

**Wniosek 1** Jeżeli w zbiorze  $D$  funkcje  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  są ciągłe, mają ciągłe pochodne cząstkowe i spełniają warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

a krzywa  $K$  łącząca punkty  $A$  i  $B$  oraz odcinek  $AB$  leżą w  $D$ , to całka krzywoliniowa po krzywej  $K$  jest równa całce krzywoliniowej po odcinku  $AB$ , tj.

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_A^B P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

Wzór w poniższym wniosku zwany jest uogólnionym wzorem Newtona - Leibniza.

**Wniosek 2** Jeżeli w zbiorze  $D$  funkcje  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  są ciągłe i mają ciągłe pochodne cząstkowe i spełniają warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

a  $F$  jest różniczką zupełną wyrażenia  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , to

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_K dF(x, y) = F(B) - F(A).$$

Możemy przeprowadzić analogiczne roważania dla całki krzywoliniowej wzdłuż krzywej  $K \subset R^3$ .

**Twierdzenie 2** Jeżeli funkcje  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  są ciągłe w zbiorze  $D$  i mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby w tym zbiorze całka krzywoliniowa

$$\int_K P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

nie zależała od drogi całkowania jest, by wyrażenie

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy + R(x, y, z)dz$$

była różniczką zupełną pewnej funkcji  $F(x, y, z)$ , tzn. by spełniony był warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} .$$

**Przykład.** Czy wyrażenia

(a)  $(2xy + y^3 + 2)dx + (x^2 + 3xy^2)dy$ ;

(b)  $(2xy^2z + 2y^2z)dx + (x^2z^2 + 4xyz)dy + (2x^2yz + 2xy^2)dz$

są różniczkami zupełnymi pewnych funkcji? Jeżeli tak to znajdź te funkcje.

(a) Mamy  $P(x, y) = 2xy + y^3 + 2$ ,  $Q(x, y) = x^2 + 3xy^2$ . Stąd

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 3y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 3y^2,$$

czyli

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

Zatem istnieje funkcja  $F(x, y)$  taka, że spełnione są warunki

$$(1) \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + y^3 + 2 \quad (2) \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 3xy^2 .$$

Z równania pierwszego otrzymujemy:

$$F(x, y) = \int (2xy + y^3 + 2)dx = x^2y + xy^3 + 2x + \varphi(y).$$

Różniczkując powyższą funkcją względem zmiennej  $y$  mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 3xy^2 + \varphi'(y).$$

Biorąc pod uwagę powyższą równość i równanie (2) mamy

$$x^2 + 3y^2x + \varphi'(y) = x^2 + 3xy^2.$$

Stąd  $\varphi'(y) = 0$ , co jest równoważne  $\varphi(y) = c$ . Tak więc funkcja  $F(x, y)$  jest postaci  $F(x, y) = x^2y + y^3x + 2x + c$ .

(b) Mamy

$$P(x, y, z) = 2xyz^2 + 2y^2z \quad , \quad Q(x, y, z) = x^2z^2 + 4xyz \quad , \quad R(x, y, z) = 2x^2yz + 2xy^2 \quad .$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 2xz^2 + 4yz \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 4xyz + 2y^2 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz^2 + 4yz \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= 2x^2z + 4xy \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 4xyz + 2y^2 \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 2x^2z + 4xy \quad . \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

więc istnieje funkcja  $F(x, y, z)$  taka, że

$$(1) \frac{\partial F}{\partial x} = 2xyz^2 + 2y^2z, \quad (2) \frac{\partial F}{\partial y} = x^2z^2 + 4xyz, \quad (3) \frac{\partial F}{\partial z} = 2x^2yz + 2xy^2.$$

Z (1) otrzymujemy

$$(4) \quad F(x, y, z) = \int (2xyz^2 + 2y^2z)dx = x^2yz^2 + 2xy^2z + \varphi(y, z).$$

Różniczkując funkcję  $F$  z równości (4) względem zmiennej  $y$  mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2z^2 + 4xyz + \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Korzystając z (2) oraz z pochodnej cząstkowej funkcji  $F$  po zmiennej  $y$  mamy

$$x^2z^2 + 4xyz + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2z^2 + 4xyz,$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Oznacza to, że funkcja  $\varphi(y, z)$  jest względem zmiennej  $y$  funkcją stałą, czyli zależną tylko od zmiennej  $z$ . Zatem  $\varphi(y, z) = a(z)$ . Ponadto różniczkując funkcję  $F(x, y, z)$  wyznaczoną w (4), względem zmiennej  $z$  mamy i podstawiając  $a(z)$  za  $\varphi(y, z)$  mamy

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2x^2yz + 2xy^2 + a'(z).$$

Porównując z warunkiem (3) otrzymujemy  $a'(z) = 0$ , co oznacza, że  $a(z) = c$ . Zatem

$$F(x, y, z) = x^2yz^2 + 2xy^2z + c.$$

### Przykład.

Obliczyć całkę

$$I = \int_K (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy,$$

po dowolnej krzywej  $K$  łączącej punkty  $A(0, 0)$  i  $B(2, 2)$ .

Zadanie to rozwiążemy na dwa sposoby.

### Sposób I.

Zauważmy, że

$$P(x, y) = 2xy - 5y^3, \quad Q(x, y) = x^2 - 15xy^2 + 6y.$$

Stąd

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 15y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 15y^2.$$

Oznacza to, że funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną pewnej funkcji  $F(x, y)$ . Mamy

$$(1) \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy - 5y^3, \quad (2) \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 15xy^2 + 6y.$$

Z warunku (1)

$$F(x, y) = \int 2xy - 5y^3 dx = x^2y - 5xy^3 + \varphi(y).$$

Różniczkując wyznaczoną funkcję  $F(x, y)$  po zmiennej  $y$  i porównując z warunkiem (2) otrzymujemy

$$x^2 - 15xy^2 + \varphi'(y) = x^2 - 15xy^2 + 6y,$$

co daje  $\varphi(y) = 3y^2 + c$ . Zatem szukana funkcja  $F(x, y)$  ma postać

$$F(x, y) = x^2y - 5xy^3 + 3y^2 + c.$$

Korzystając z uogólnionego wzoru Newtona-Leibniza mamy

$$I = \int_K (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy = F(2, 2) - F(0, 0) = 8 - 80 + 12 + c - c = -60.$$

**Sposób II.** Wykazaliśmy w poprzednim rozwiązaniu, że funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną pewnej funkcji  $F(x, y)$ , co oznacza, że szukana całka nie zależy od drogi całkowania. Korzystając z Wniosku 1 wynikającego z Twierdzenia 7, możemy zatem daną całkę obliczyć po odcinku łączącym punkty  $A(0, 0)$  i  $B(2, 2)$ . Odcinek  $AB$  ma parametryzację

$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad t \in [0, 2].$$

Zatem

$$I = \int_K (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy = \int_0^2 (-20t^3 + 3t^2 + 6t)dt = \left[-5t^4 + t^3 + 3t^2\right]_0^2 = -60.$$

## 2.3 Twierdzenie Greena

Mówimy, że krzywa  $K$  jest krzywą zamkniętą, jeśli początek tej krzwej pokrywa się z jej końcowi. Każda zamknięta krzywa gładka  $K$  wyznacza na płaszczyźnie dwa zbiory. Zbiór ograniczony zwany **wnętrzem krzywej** oraz zbiór nieograniczony zwany **zewnątrzem krzywej**. Całkę krzywoliniową po zamkniętej krzywej  $K$  oznaczamy często symbolem

$$\oint_K (P(x, y)dx + Q(x, y)dy).$$

Zamkniętej krzywej  $K$  możemy nadać orientację dodatnią względem wnętrza, gdy przy obiegu krzywej zbiór jest zawsze po lewej stronie, lub ujemną. Zachodzi następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3** *Jeżeli funkcje  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  są ciągłe i mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w pewnym zbiorze normalnym  $D$ , przy czym brzeg  $K$  tego zbioru jest krzywą skierowaną dodatnio względem wnętrza, to*

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Przykład.** Obliczyć całkę  $I = \oint_K (2xy - 5y)dx + (x^2 + y)dy$ , gdzie  $K$  jest okręgiem  $x^2 + y^2 = 4$  zorientowanym dodatnio.

Mamy

$$P(x, y) = 2xy - 5y \quad , \quad Q(x, y) = x^2 + y \quad ,$$

skąd

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 5 \quad .$$

Z Twierdzenia Greena mamy

$$I = \oint_K (2xy - 5y)dx + (x^2 + y)dy = \iint_D 5 dx dy = 5|D| \quad ,$$

gdzie  $|D|$  oznacza miarę zbioru  $D$ , którego brzegiem jest krzywa  $K$ , czyli pole powierzchni koła  $D$ . Ze znanego wzoru na pole koła mamy

$$I = \oint_K (2xy - 5y)dx + (x^2 + y)dy = 5|D| = 20\pi \quad .$$

**Przykład.** Obliczyć całkę

$$I = \oint_K \frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \arctg \frac{x}{y} dy,$$

gdzie  $K$  jest krzywą zamkniętą, zorientowaną dodatnio, będącą sumą łuków okręgów  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  i odcinków prostych  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$ , leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Mamy

$$P(x, y) = \frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} \quad , \quad Q(x, y) = \frac{2}{y} \arctg \frac{x}{y}.$$

Stąd

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

oraz

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Ponieważ założenia Twierdzenia Greena są spełnione zatem

$$I = \oint_K \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy = \iint_D \left( \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dx dy = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Zbiór  $D$  ograniczony przez krzywą  $K$  jest wycinkiem pierścienia pomiędzy prostymi, które są nachylone do osi  $Ox$  pod kątami  $\frac{\pi}{4}$  i  $\frac{\pi}{3}$ , zatem przy obliczaniu całki skorzystamy ze współrzędnych biegunowych. Mamy

$$I = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_1^2 \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{r^2} r d\varphi \right) dr = \int_1^2 \frac{1}{r} [\varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dr = \frac{\pi}{12} [\ln r]_1^2 = \frac{\pi}{12} \ln 2.$$