4. Pochodna kierunkowa, operatory różniczkowe

W zastosowaniach rachunku różniczkowego istotne bywa badanie szybkości wzrostu wielkości fizycznych nie tylko w kierunku osi układu współrzędnych, ale też w dowolnym kierunku wyznaczonym przez wektor $\overrightarrow{v}$ lub półprostą o kierunku $\overrightarrow{v}$.

Niech l będzie półprostą o początku w punkcie $P_0(x_0, y_0)$.

Definicja 1. *Granicę* $\lim_{P\to P_0} \frac{f(P)-f(P_0)}{|P_0P|}$, *gdzie* $P(x,y) \in l$, *o ile istnieje, nazywamy* **pochodną kierunkową** *funkcji* f *w punkcie* P_0 *w kierunku* l *i oznaczamy symbolem* $\frac{\partial f}{\partial l}(P_0)$.

Jeśli półprosta l jest równoległa do osi Ox i zgodnie z nią zorientowna, to $\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$, a gdy przeciwnie, to $\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$. Analogiczne zależności łączą $\frac{\partial f}{\partial l}(P_0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ gdy l jest równoległa do osi Oy.

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja$f$ jest różniczkowalna w punkcie* P_0, *to*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\sin\alpha \ ,$$

gdzie α *jest miarą skierowanego kąta jaki półprosta* l *tworzy z osią* Ox.

W zastosowaniach rachunku różniczkowego wykorzystujemy 4 operatory różniczkowe określone na funkcjach różniczkowalnych. Na początek pierwszy z nich - gradient w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Definicja 2. *Gradientem funkcji* f *w punkcie* P_0 *nazywamy wektor* $\overrightarrow{grad} f(P_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right]$.

Można wykazać, że jeśli $\overrightarrow{grad} f(P_0) \neq \overrightarrow{0}$, to pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie P_0 przyjmuje największą wartość, gdy jest obliczana w kierunku gradientu. Co więcej, ta wartość jest równa długości wektora $\overrightarrow{grad} f(P_0)$.

Przykład

Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = x^2y^3$ w punkcie $P_0(1,2)$ w kierunku

a) $\overrightarrow{v} = [-1, 1]$

b) $\overrightarrow{grad} f(P_0)$.

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f i mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 16 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 12 \ .$$

Mamy więc $\overrightarrow{grad} f(1,2) = [16, 12]$.

a) Obliczamy kąt α (identycznie jak argument liczby zespolonej $-1+i$, gdyż liczba zespolona jest interpretowana jako punkt na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ lub wektor wodzący tego punktu!). Mamy $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ i stąd $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Z powyższego twierdzenia mamy

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = 16 \cdot \tfrac{-1}{\sqrt{2}} + 12 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{-4}{\sqrt{2}} \ .$$

b) Oznaczmy $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{grad} f(1,2)$, więc $\overrightarrow{u} = [16, 12]$. Obliczamy kąt α: $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ i stąd $\cos\alpha = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = 16 \cdot \tfrac{4}{5} + 12 \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{100}{5} = 20 \ .$$

Zauważmy, że otrzymana wartość pochodnej kierunkowej jest równa długości wektora $\overrightarrow{u}$.

W przypadku najbardziej ogólnym, rozpatrujemy funkcje i operatory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Najpierw niezbędne określenie - funkcją wektorową będziemy nazywali wektor $\overrightarrow{F}$ złożony z trzech funkcji 3 zmiennych $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Piszemy wtedy $\overrightarrow{F} = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ lub krótko, bez podawania punktu na który działają funkcje, $\overrightarrow{F} = [P,Q,R]$. Mamy następujące określenia.

Definicja 3. Gradientem funkcji f *nazywamy wektor* $\overrightarrow{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$.

Definicja 4. Laplasjanem funkcji f *nazywamy liczbę* $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Definicja 5. Dywergencją funkcji wektorowej $\overrightarrow{F} = [P,Q,R]$ *nazywamy liczbę* $\mathrm{div}\,\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Definicja 6. Rotacją funkcji wektorowej $\overrightarrow{F} = [P,Q,R]$ *nazywamy wektor*

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{F} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] .$$

Przykład Pole elektrostatyczne ładunku punktowego q umieszczonego w początku układu współrzędnych działające na jednostkowy ładunek umieszczony w punkcie $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ jest funkcją wektorową $\overrightarrow{F} = \frac{q}{r^3}[x,y,z] = \left[\frac{xq}{r^3}, \frac{yq}{r^3}, \frac{zq}{r^3}\right]$, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Oblicz $\mathrm{div}\,\overrightarrow{F}$.

Mamy

$$P(x,y,z) = \tfrac{xq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ,\ Q(x,y,z) = \tfrac{yq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ ,\ R(x,y,z) = \tfrac{zq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ .$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} &= q \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)\cdot(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2+z^2)^{3/2})}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= q \cdot \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\cdot 2x\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= q \cdot \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= q \cdot \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\left[(x^2+y^2+z^2) - 3x^2\right]}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= q \cdot \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\ .
\end{aligned}$$

Łatwo zaobserwować, że zachodzi swego rodzaju symetria: gdy liczymy pochodną cząstkową funkcji Q po y to wykonujemy dokładnie te same kroki i otrzymujemy te same wyniki co przy liczeniu pochodnej cząstkowej P po x (oczywiście ze stosowną zamianą zmiennych x na y). To samo dzieje się przy liczeniu pochodnej cząstkowej R po z. Zatem

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = q\cdot\frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\quad ,\quad \frac{\partial R}{\partial z} = q\cdot\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\ ,$$

skąd

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = q\cdot\left[\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] = 0\ .$$