Całka we współrzędnych biegunowych

Zadanie 1. $\iint\limits_D (x^2+y^2+6y)dxdy, \quad D: \; x^2+y^2 \leqslant 9, y \leqslant 0.$

Koło $x^2+y^2 \leqslant 9$ można opisać za pomocą współrzędnych biegunowych w następujący sposób $\{(r,\varphi): r\in[0,3], \varphi\in[0,2\pi]\}$. Warunek $y \geqslant 0$ oznacza, że zbiorowi D odpowiada we współrzędnych biegunowych zbiór $\Delta = \{(r,\varphi): \; r\in[0,3], \varphi\in[0,\pi]\}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2+6y)dxdy &= \iint_\Delta (r^2+6r\sin\varphi)\cdot rdrd\varphi = \iint_\Delta (r^3+6r^2\sin\varphi)drd\varphi \\
&= \int_0^3 \left[\int_0^\pi (r^3+6r^2\sin\varphi)d\varphi\right] dr = \int_0^3 \Big[r^3\varphi - 6r^2\cos\varphi\Big]_0^\pi dr \\
&= \int_0^3 \Big[r^3\pi - 6r^2(-1-1)\Big]_0^\pi dr = \int_0^3 (r^3\pi+12r^2)dr \\
&= \left(\tfrac{1}{4}r^4\pi + 4r^3\right)\Big|_0^3 = \tfrac{81\pi}{4} + 108 \ .
\end{aligned}$$

Zadanie 2. $\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D: \; x^2+y^2 \leqslant 1.$

Zbiorowi D odpowiada we współrzędnych biegunowych zbiór $\Delta = \{(r,\varphi): \; r\in[0,1], \varphi\in[0,2\pi]\}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \iint_\Delta e^r \cdot rdrd\varphi = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} re^r d\varphi\right] dr \\
&= \int_0^1 \left[re^r\varphi\right]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 2\pi re^r dr = 2\pi\int_0^1 re^r dr \ .
\end{aligned}$$

Ostatnią całkę obliczamy przez części (jako nieoznaczoną)

$$\int re^r dr = \begin{vmatrix} f(r)=r & g'(r)=e^r \\ f'(r)=1 & g(r)=e^r \end{vmatrix} = re^r - \int e^r dr = re^r - e^r = e^r(r-1) \ .$$

Zatem

$$\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = e^r(r-1)\big|_0^1 = 0-(-e^0) = 1 \ .$$

Zadanie 3. $\iint\limits_D 4xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy, \quad D: \; x^2+y^2 \leqslant 16 \ , \ 0 \leqslant y \leqslant x.$

Zbiorowi $x^2+y^2 \leqslant 16$ odpowiada we współrzędnych biegunowych zbiór $\Delta = \{(r,\varphi): \; r\in[0,4], \varphi\in[0,2\pi]\}$. Warunek $0 \leqslant y \leqslant x$ oznacza, że bierzemy tylko tę część koła, która leży w górnej półpłaszczyźnie ($y \geqslant 0$), ale poniżej prostej $y=x$ będącej dwusieczną pierwszej ćwiartki układu współrzędnych. Oznacza to, że zbiorowi D odpowiada we współrzędnych biegunowych zbiór $\Delta = \{(r,\varphi): \; r\in[0,4], \varphi\in[0,\pi/4]\}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\iint_D 4xy\tfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy &= \iint_\Delta 4r^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\tfrac{r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{r^2}\cdot rdrd\varphi \\
&= \iint_\Delta 4r^3\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)drd\varphi \\
&= \iint_\Delta 2r^3\sin 2\varphi\cos 2\varphi drd\varphi \\
&= \iint_\Delta r^3\sin 4\varphi drd\varphi = \int_0^4 \left[\int_0^{\pi/4} r^3\sin 4\varphi d\varphi\right] dr \\
&= \int_0^4 \Big[-\tfrac{1}{4}r^3\cos 4\varphi\Big]_0^{\pi/4} dr = \int_0^4 \Big[-\tfrac{1}{4}r^3(-1-1)\Big] dr \\
&= \int_0^4 \tfrac{1}{2}r^3 dr = \tfrac{1}{8}r^4\Big|_0^4 = 32 \ .
\end{aligned}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy; \quad D: x^2+y^2 \leqslant 1$
2. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy; \quad D: 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant e^2$
3. $\iint\limits_D (x+1)dxdy; \quad D: x^2+y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$
4. $\iint\limits_D x(x^2+y^2)dxdy \quad D: x^2+y^2 \leqslant 16, 0 \leqslant y \leqslant x$
5. $\iint\limits_D \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy; \quad D: 9 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 16, y \geqslant 0$
6. $\iint\limits_D (2-x+3y)\ dxdy, \quad D: x^2+y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0$
7. $\iint\limits_D (x+y-x^2-y^2+1)dxdy, \quad D: x^2+y^2 \leqslant 4, x \leqslant 0, y \leqslant 0$