Współrzędne biegunowe zadania

Korzystając z pojęcia współrzędnych biegunowych obliczyć następujące całki:

1. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy; \quad D : x^2 + y^2 \leqslant 1;$

2. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy; \quad D : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant e^2;$

3. $\iint\limits_D (x+1) dxdy; \quad D : x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0;$

4. $\iint\limits_D x(x^2+y^2) dxdy \quad D : x^2 + y^2 \leqslant 16, 0 \leqslant y \leqslant x$

5. $\iint\limits_D \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy; \quad D : 9 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16, y \geqslant 0;$

6. $\iint\limits_D (2 - x + 3y)\ dxdy, \quad D : x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0;$

7. $\iint\limits_D (x + y - x^2 - y^2 + 1) dxdy, \quad D : x^2 + y^2 \leqslant 4, x \leqslant 0, y \leqslant 0.$

Rozwiążemy zadanie 4.

Rozpocznijmy od przekształcenia zbioru D w zbiór Δ, przekształcenie to określi nam dokładny zakres zmienności (r, φ). Z warunków opisujących zbiór D mamy $0 \leqslant r^2 \leqslant 16$, co jest równoważne (1) $0 \leqslant r \leqslant 4$. Pozostałe dwie nierówności: $r \sin\varphi \geqslant 0$ i jednocześnie $r \sin\varphi \leqslant r\cos\varphi$ są spełnione dla $\varphi \in [0, 2\pi]$ wtedy i tylko wtedy, gdy (2) $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Widzimy więc, że obrazem opisywanego wycinka koła poprzez przekształcenie biegunowe jest prostokąt, co jest dla nas ułatwieniem w kontekście całki podwójnej, ponieważ kolejność całkowania nie ma znaczenia. Przypomnijmy jeszcze, że dokonując zamiany zmiennych w całce podwójnej, funkcję pod całką musimy pomnożyć przez wyznacznik macierzy przejścia ze współrzędnych kartezjańskich do biegunowych, tzw. Jakobian, który w przypadku współrzędnych biegunowych jest niezmienny: $J = r$. Dokonujemy zamiany współrzędnych:

$$\iint\limits_D x(x^2+y^2) dxdy = \iint\limits_\Delta r\cos\varphi(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\cdot r dr d\varphi = \iint\limits_\Delta r^2\cos\varphi \cdot r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) r dr d\varphi =$$
$$= \iint\limits_\Delta r^4 \cos\varphi dr d\varphi$$

Następnie dokonujemy iteracji:

$$\iint\limits_\Delta r^4\cos\varphi dr d\varphi = \int_0^4 \left[\int_0^{\pi/4} (r^4\cos\varphi) d\varphi\right] dr = \int_0^4 \left[r^4 \sin\varphi\right]_0^{\pi/4} dr =$$
$$= \int_0^4 \left[r^4(\sin(\pi/4) - \sin 0)\right] dr = \int_0^4 r^4 \frac{\sqrt{2}}{2} dr = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4^5}{5} = \frac{512\sqrt{2}}{5}.$$