Całka powierzchniowa i krzywoliniowa zorientowana - ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z Twierdzenia Gaussa z wykładu:

(a) Obliczyć strumień pola $\vec{F} = [x^2, y^2, z^2]$ przez zewnętrzną stronę powierzchni S czworościanu ograniczonego płaszczyznami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 3$.

(b) Obliczyć strumień pola $\vec{F} = [2xy, -y^2, 2x]$ po zewnętrznej stronie bryły ograniczonej przez $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0$.

(c) Obliczyć strumień pola $\vec{F} = [x+y, y+z, z+x]$ przez powierzchnię $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$ zorientowaną na zewnątrz.

(d) Obliczyć strumień pola $\vec{F} = [3x, -y, 2z]$ po zewnętrznej stronie bryły ograniczonej przez $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0$.

(e) Obliczyć strumień pola $\vec{F} = [z^2, y^2, x^2]$ przez powierzchnię $S = \{0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\}$ zorientowaną na zewnątrz.

Rozwiązanie przykładu (a):

Możemy skorzystać z twierdzenia Gaussa. Zatem potrzebujemy policzyć pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

Mamy

$$\oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \iiint_G (2x + 2y + 2z)\, dxdydz = I$$

gdzie $G : \{(x, y) \in D\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 - x - y\}$, zaś D jest rzutem prostopadłym czworościanu na płaszczyznę xOy. Jest to trójkąt ograniczony osiami układu współrzędnych $x = 0,\ y = 0$ oraz prostą $y = 3 - x$. Zatem

$$\begin{aligned}
I &= 2\iiint_G (x + y + z)\, dxdydz = 2\int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{3-x-y} (x + y + z)\ dz \\
&= 2\int_0^3 \left[\int_0^{3-x} \left((x + y)z + \frac{1}{2}z^2\right)_{z=0}^{z=3-x-y} dy\right] dx \\
&= 2\int_0^3 \left[\int_0^{3-x} \left((x + y)(3 - x - y) + \frac{1}{2}(3 - x - y)^2\right)\ dy\right] dx.
\end{aligned}$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^3 \left[\int_0^{3-x} \left(-\tfrac{1}{2}x^2 - xy - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{9}{2}\right)\ dy\right] dx \\
&= 2\int_0^3 \left[-\tfrac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{9}{2}y\right]_0^{3-x} dx \\
&= 2\int_0^3 \left[-\tfrac{1}{2}x^2(3 - x) - \frac{1}{2}x(3 - x)^2 - \tfrac{1}{6}(3 - x)^3 + \tfrac{9}{2}(3 - x)\right] dx.
\end{aligned}$$

Wykonując elementarne obliczenia i redukując wyrazy podobne, mamy

$$I = 2\int_0^3 \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{9}{2}x + 9\right] dx = 2\left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{9}{4}x^2 + 9x\right]_0^3 = \frac{81}{4}.$$

Zadanie 2. **Korzystając z Twierdzenia Stokesa z wykładu:**

(a) Oblicz całkę $I = \oint\limits_K (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz$, gdzie krzywa K jest brzegiem zorientowanym dodatnio względem podanego płata S:
*) S - dolna strona półsfery $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$,
**) S - górna strona paraboloidy $z = 1-x^2-y^2$ odciętej płaszczyzną $z=0$,
***) S - dolna strona stożka $z = \sqrt{x^2+y^2} - 2$ odciętego płaszczyzną $z=0$.

(b) Oblicz całkę $I = \oint\limits_K (x^2+y^2)dx + (y^2+z^2)dy + (z^2+x^2)dz$, gdzie krzywa K jest brzegiem stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$, odciętego płaszczyzną $z=1$, przebieganym w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara.

(c) Oblicz całkę $I = \oint\limits_K 2x\ dx + 3y\ dy + 4z\ dz$, gdzie krzywa K jest brzegiem półsfery $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, przebieganym w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara.

Rozwiązanie przykładu (a):

*)

Krzywa K jest brzegiem płata S, czyli brzegiem półsfery $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Mamy

$$P = x-y, \qquad Q = y-z, \qquad R = z-x$$

i

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -1, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1.$$

Z twierdzenia Stokesa mamy

$$\oint\limits_K (x-y)dx + (y-z)dy + (z-x)dz = \iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy.$$

Równanie funkcyjne płata S to równanie $z = f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Stąd $f'_x = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ oraz $f'_y = -\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy &= \iint\limits_D \left(1 \cdot \frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + 1 \cdot \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + 1 \cdot 1\right) dxdy \\
&= \iint\limits_D \left(\frac{x+y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} + 1\right) dxdy = I.
\end{aligned}$$

Ponieważ D jest rzutem prostopadłym S na płaszczyznę xOy, czyli kołem $x^2+y^2 \leqslant 9$. Korzystając ze współrzędnych biegunowych $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, gdzie $r \in [0,3]$ oraz $\varphi \in [0, 2\pi]$, mamy

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^3 \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{\sqrt{9-r^2}} + 1\right) r\ d\varphi\right] dr \\
&= \int_0^3 \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{\sqrt{9-r^2}}(\cos\varphi + \sin\varphi) + r\right)\ d\varphi\right] dr \\
&= \int_0^3 \left[\frac{r^2}{\sqrt{9-r^2}} \left(\sin\varphi - \cos\varphi\right)_0^{2\pi} + r[\varphi]_0^{2\pi}\right] dr \\
&= \int_0^3 [0 + 2\pi \cdot r]\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2}[r^2]_0^3 = 9\pi.
\end{aligned}$$

Zadanie3. Znaleźć strumień wektora F przez niezamkniętą powierzchnię.

(a) $\vec{F} = [z^2, xz, y^2]$ - przez płat paraboloidy obrotowej $z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geqslant 0$,

(b) $\vec{F} = [y, z, x]$ - przez powierzchnię boczną walca $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 4$.

Rozwiązanie przykładu (a):

Rozważany płat nie jest płatem zamkniętym, więc nie możemy skorzystać z twierdzenia Gaussa. Możemy jednak domknąć go kołem $x^2 + y^2 \leqslant 4$ leżącym na płaszczyźnie $z = 0$. Oznaczmy przez S_1 płat paraboloidy obrotowej, a koło (jego górną stronę) przez S_2. Zgodnie z tymi oznaczeniami postawiony problem sprowadza się do obliczenia całki

$$I_1 = \oiint\limits_{S_1} z^2\ dydz + xz\ dzdx + y^2\ dxdy.$$

Ponieważ $S = S_1 \cup S_2$ jest płatem kawałkami gładkim, zamkniętym, który ogranicza bryłę G postaci $G:\ 0 \leqslant z \leqslant 4 - x^2 - y^2$, więc możemy skorzystać z twierdzenia Gaussa

$$I = \oiint\limits_{S} z^2\ dydz + xz\ dzdx + y^2 dxdy = \iiint\limits_{G} (0+0+0)\, dxdydz = 0.$$

Z drugiej strony obliczamy całkę powierzchniową zorientowaną po S_2 o równaniu $z = f(x,y),\ f(x,y) = 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Mamy $f'_x = 0,\ f'_y = 0$ i

$$I_2 = \oiint\limits_{S_2} z^2\ dydz + xz\ dzdx + y^2\ dxdy = \iint\limits_{D} (0 + 0 + y^2 \cdot 1) dxdy\ ,$$

gdzie D jest rzutem prostopadłym S_2 na płaszczyznę xOy, czyli kołem $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Zatem

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_{D} y^2 dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\varphi \cdot r d\varphi \right] dr \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} r^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right) d\varphi \right] dr \\ &= \int_0^2 r^3 \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} dr = \int_0^2 r^3\, [\pi - 0]\, dr = \frac{1}{4} [r^4]_0^2 \pi = 4\pi. \end{aligned}$$

Wiemy, że

$$I = \oiint\limits_{S} z^2\ dydz + xz\ dzdx + y^2\ dxdy = \oiint\limits_{S_1} z^2\ dydz + xz\ dzdx + y^2\ dxdy + \oiint\limits_{S_2} z^2\ dydz + xz\ dzdx + y^2\ dxdy = I_1 + I_2\ ,$$

więc $0 = I_1 + 4\pi$, a zatem

$$I_1 = -4\pi\ .$$